वियोज्य / DETACHABLE

गणित (प्रश्नपत्र I)

MATHEMATICS (Paper I)

समय : तीन घण्टे Time Allowed : Three Hours	अधिकतम अंक : 250 Maximum Marks : 250

प्रश्नपत्र के लिए निर्देश

उत्तर लिखना शुरू करने से पहले कृपया निम्न निर्देशों में से प्रत्येक को ध्यानपूर्वक पढ़ लीजिए।

आठ प्रश्नों को दो **खंडों** मे बांटा गया है और **हिन्दी** तथा **अंग्रेजी** में छापा गया है।

उम्मीदवार को कुल **पांच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न **1** एवं **5** अनिवार्य हैं, बाकी में से **तीन** का उत्तर प्रत्येक खंड से न्यूनतम **एक** प्रश्न लेते हुए करना है।

प्रश्न/अंश के अंक उस के सामने दिये गए हैं।

उत्तर उसी माध्यम में दिये जाने हैं जो सार्टिफिकेट में अनुमत है। उसका उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (QCA) बुकलेट में निर्धारित स्थान पर मुखपृष्ठ पर करना जरूरी है। अनुमत माध्यम से भिन्न माध्यम में दिये उत्तरों पर कोई अंक नहीं दिया जायेगा।

जरूरत होने पर, उचित आंकड़े मान लें, उस का उल्लेख स्पष्टतः अवश्य करें।

यदि अन्यथा सूचित नहीं हो, सिंबल एवं नोटेशन आम तौर पर प्रयुक्त सामान्य अर्थ वहन करते हैं।

सभी प्रश्नों को क्रमान्वय में गिना जायेगा। प्रश्न आंशिक रूप में किया गया, तो भी गिना जायेगा यदि उसे नहीं काट दिया गया हो। कोई खाली पन्ना या अंश यदि उत्तर पुस्तिका में छोड़ा गया है, उसे स्पष्टतः अवश्य काट दें।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are EIGHT questions divided into two SECTIONS and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question No. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खंड 'क'

1. सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

1.(a) प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया का इस्तेमाल करते हुए, आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

का प्रतिलोम मालूम कीजिए । अतएव रैखिक समीकरणों के तंत्र को हल कीजिए

$$x + 3y + z = 10$$
$$2x - y + 7z = 21$$
$$3x + 2y - z = 4$$

10

1.(b) लीजिए एक वर्ग आव्यूह A और उसका संलग्न A^* । दर्शाइए कि आव्यूहों AA^* और A^*A के आइगन मान वास्तविक हैं । आगे दर्शाइए कि ट्रेस $(AA^*) =$ ट्रेस (A^*A) । 10

1.(c) मूल्यांकन कीजिए $\int_0^1 \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$ । 10

1.(d) एक ऐसे समतल का समीकरण मालूम कीजिए जो बिंदुओं (0, 1, 1) और (2, 0, –1) में से गुज़रता हो और जो बिंदुओं (–1, 1, –2), (3, –2, 4) को जोड़ने वाली रेखा के समांतर हो । इसके साथ ही रेखा और समतल के बीच की दूरी भी मालूम कीजिए । 10

1.(e) एक गोलक S के व्यास के आमने-सामने के सिरों पर बिंदु (0, 1, 0), (3, –5, 2) हैं । गोलक के समीकरण को मालूम कीजिए, जिसका गोलक S का समतल $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ के साथ प्रतिच्छेद एक बृहत् वृत्त के रूप में है । 10

2.(a)(i) लीजिए कि P_n अधिकांश n पर कोटि के सभी वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि को द्योतित करता है और कि $T : P_2 \to P_3$ निम्नलिखित द्वारा दत्त एक रैखिक रूपांतरण है :

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt, \qquad p(x) \in P_2$$

P_2 और P_3 के क्रमशः $\{1, x, x^2\}$ और $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ आधारों के विषय में T का आव्यूह मालूम कीजिए । इस के साथ T की शून्य समष्टि भी मालूम कीजिए । 10

2.(a)(ii) लीजिए कि V एक n-विमीय सदिश समष्टि है और $T : V \to V$ एक व्युत्क्रमणीय रैखिक संकारक है । यदि $\beta = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ आधार हो V का, तो दर्शाइए कि $\beta' = \{TX_1, TX_2, \ldots, TX_n\}$ भी V का आधार होगा । 8

2.(b)(i) लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ जहाँ $\omega(\neq 1)$ एक का घनमूल है । यदि $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ द्योतित करते हैं A^2 के आइगन मानों का, तो दर्शाइए कि $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq 9$. 8

2.(b)(ii) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि को मालूम कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

2.(c)(i) लीजिए कि A एक हार्मिटी आव्यूह है, जिसके सभी सुस्पष्ट आइगन मान $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ हैं। यदि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ संगत आइगन सदिश हों तो, दर्शाइए कि $n \times n$ आव्यूह C, जिसका k वां स्तंभ सदिश X_k का हो, व्युत्क्रमणीय होता है। 8

2.(c)(ii) दर्शाइए कि C^3 में सदिश $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ और $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकत: स्वतंत्र हैं, लेकिन सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकत: परतंत्र हैं। 8

3.(a) लाग्रांज की गुणक पद्धति व्यवहार कर रेखा $y = 10 - 2x$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ के बीच लघुतम दूरी मालूम कीजिए। 20

3.(b) $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ फलन के लिए परिकलन कीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f_{xy} तथा f_{yx} की $(0, 0)$ पर निरंतरता पर विचार कीजिए। 15

3.(c) $\iint\limits_D xy \, dA$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ D, रेखा $y = x - 1$ और पैराबोला $y^2 = 2x + 6$ के द्वारा परिबद्ध प्रदेश है। 15

4.(a) दर्शाइए कि गोलक $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$ पर किसी भी बिंदु से गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ तक तीन आपस में लंब स्पर्शरिखाएं खींची जा सकती हैं। 15

4.(b) एक शंकु का अपने गाइडिंग वक्र के रूप में वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0, z = 0$ है और वह एक स्थिर बिंदु $(0, 0, c)$ के बीच से गुज़रता है। यदि समतल $y = 0$ के द्वारा शंकु का परिच्छेद एक आयताकार हाइपरबोला हो, तो साबित कीजिए कि शीर्ष निम्नलिखित स्थिर वृत्त पर होगा :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$$
$$2ax + 2by + cz = 0.$$

15

4.(c) एक परिवर्ती जेनेरेटर तंत्र के दो जेनेरेटरों से मिलता है, और उसका मिलन P और P' में अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 1$ के प्रधान दीर्घवृत्तीय परिच्छेद के अल्प अक्ष के सिरों B और B' में से होता है। सिद्ध कीजिए कि $BP \cdot B'P' = a^2 + c^2$. 20

खंड 'ख'

5. सभी प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

5.(a) y एक फलन है x का, इस प्रकार कि अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ निम्नलिखित के बराबर है $\cos(x + y) + \sin(x + y)$ । x और y के बीच संबंध मालूम कीजिए, जो किसी अवकलज/अवकल से मुक्त हो । 10

5.(b) $r^n = a \sin n\theta$ के द्वारा व्यंजित वक्र-कुल की लंबकोणीय संछेदी का समीकरण प्राप्त कीजिए । (r, θ) समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं । 10

5.(c) एक पिंड ऋजु रेखा OPQ में सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है । उसका बिंदु P और Q पर शून्य वेग है, जिनके O से दूरियां क्रमशः x और y हैं और उसका P और Q के बीच मध्य-बिंदु पर वेग v है । एक पूर्ण दोलन का समय मालूम कीजिए । 10

5.(d) एक आनत समतल का आधार लंबाई में 4 मीटर और ऊँचाई में 3 मीटर है । समतल के समांतर कार्य करता हुआ 8 kg का एक बल 20 kg के भार को नीचे की ओर सरकने को मुश्किल से रोकता है । समतल और भार के बीच घर्षण गुणांक मालूम कीजिए । 10

5.(e) दर्शाइए कि वक्र

$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$ एक समतल में स्थित है । 10

6.(a) अवकल समीकरण को हल कीजिए
$(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0.$ 10

6.(b) प्राचल विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ को हल कीजिए । 10

6.(c) समीकरण

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x)$ का सामान्य हल मालूम कीजिए । 15

6.(d) आरंभिक शर्तों

$t = 0$ पर $x = 0$ और $\frac{dx}{dt} = 0$ के अधीन अवकल समीकरण

$\left(D^2 + n^2\right)x = a \sin(nt + \alpha),\ D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ को लैप्लेस रूपांतर विधि का इस्तेमाल करते हुए हल कीजिए, जिसमें a, n और α नियतांक हैं । 15

7.(a) 2·5 kg द्रव्यमान का एक कण 0·9 m लंबी ऐसी रस्सी के सिरे पर लटका हुआ है, जिसका दूसरा सिरा एक स्थिर बिंदु के साथ जुड़ा हुआ है । कण को वेग 8 m/सै. के साथ क्षैतिजतः प्रक्षेपित किया जाता है । जब रस्सी (i) क्षैतिज, (ii) ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर हो, तब कण के वेग और रस्सी में तनाव को मालूम कीजिए । 20

7.(b) एक एकसमान सीढ़ी क्षितिज के साथ 45° के कोण पर रखी है। उसका ऊपरी सिरा खुरदरी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है और निचला सिरा भूमि पर टिका है। यदि μ और μ' क्रमशः सीढ़ी और भूमि के बीच और सीढ़ी और दीवार के बीच सीमक घर्षण के गुणांक हों, तो सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार की तरफ खिसकाने के लिए आवश्यक न्यूनतम क्षैतिज बल मालूम कीजिए। 15

7.(c) छह बराबर की छड़ें AB, BC, CD, DE, EF और FA, जिनमें से प्रत्येक का भार W है, अपने सिरों से मुक्त रूप से ऐसे जुड़ी हुई हैं कि एक षड्भुज बन गया है। छड़ AB क्षैतिज स्थिति में जुड़ी हुई है और AB और DE के मध्य बिंदु एक रस्सी से जुड़े हैं। रस्सी में तनाव मालूम कीजिए। 15

8.(a) $\nabla^2(r^n)$ का परिकलन कीजिए और r और n के रूप में उसका व्यंजक मालूम कीजिए। r मूल से किसी बिंदु (x, y, z) की दूरी है, n एक नियतांक है और ∇^2 लैप्लेस संकारक है। 10

8.(b) आकाश में एक वक्र निम्नलिखित सदिश समीकरण के द्वारा परिभाषित है $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$ बिंदुओं $t = +1$ और $t = -1$ पर इस वक्र पर स्पर्शरेखाओं के बीच कोण का निर्धारण कीजिए। 10

8.(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए, पृष्ठ-समाकल

$\iint \left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}} dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ S दीर्घवृत्तज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का पृष्ठ है। a, b और c सभी धनात्मक नियतांक हैं। 15

8.(d) रेखा समाकल $\int_C \left(-y^3dx + x^3dy - z^3dz\right)$ का मूल्यांकन करने के लिए स्टोक का प्रमेय व्यवहार कीजिए, जहां C है सिलिंडर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेदन। 15

SECTION 'A'

1. Answer all the questions :

1.(a) Find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

by using elementary row operations. Hence solve the system of linear equations

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 10 \\ 2x - y + 7z &= 21 \\ 3x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

10

1.(b) Let A be a square matrix and A^* be its adjoint, show that the eigenvalues of matrices AA^* and A^*A are real. Further show that trace (AA^*) = trace (A^*A). 10

1.(c) Evaluate $\int_0^1 \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$. 10

1.(d) Find the equation of the plane which passes through the points (0, 1, 1) and (2, 0, −1), and is parallel to the line joining the points (−1, 1, −2), (3, −2, 4). Find also the distance between the line and the plane. 10

1.(e) A sphere S has points (0, 1, 0), (3, −5, 2) at opposite ends of a diameter. Find the equation of the sphere having the intersection of the sphere S with the plane $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ as a great circle. 10

2.(a)(i) Let P_n denote the vector space of all real polynomials of degree atmost n and $T: P_2 \to P_3$ be a linear transformation given by

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt, \qquad p(x) \in P_2.$$

Find the matrix of T with respect to the bases $\{1, x, x^2\}$ and $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ of P_2 and P_3 respectively. Also, find the null space of T. 10

2.(a)(ii) Let V be an n-dimensional vector space and $T: V \to V$ be an invertible linear operator. If $\beta = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ is a basis of V, show that $\beta' = \{TX_1, TX_2, \ldots, TX_n\}$ is also a basis of V. 8

2.(b)(i) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ where $\omega(\neq 1)$ is a cube root of unity. If $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denote the eigenvalues of A^2, show that $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq 9$. 8

2.(b)(ii) Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

2.(c)(i) Let A be a Hermetian matrix having all distinct eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are corresponding eigenvectors then show that the $n \times n$ matrix C whose k^{th} column consists of the vector X_k is non singular. 8

2.(c)(ii) Show that the vectors $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ and $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ in C^3 are linearly independent over the field of real numbers but are linearly dependent over the field of complex numbers. 8

3.(a) Using Lagrange's multiplier method, find the shortest distance between the line $y = 10 - 2x$ and the ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. 20

3.(b) Compute $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of f_{xy} and f_{yx} at (0, 0). 15

3.(c) Evaluate $\iint_D xy\, dA$, where D is the region bounded by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$. 15

4.(a) Show that three mutually perpendicular tangent lines can be drawn to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ from any point on the sphere $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. 15

4.(b) A cone has for its guiding curve the circle $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0,\ z = 0$ and passes through a fixed point $(0, 0, c)$. If the section of the cone by the plane $y = 0$ is a rectangular hyperbola, prove that the vertex lies on the fixed circle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$$
$$2ax + 2by + cz = 0.$$
15

4.(c) A variable generator meets two generators of the system through the extremities B and B' of the minor axis of the principal elliptic section of the hyperboloid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 1$ in P and P'. Prove that $BP \cdot B'P' = a^2 + c^2$. 20

SECTION 'B'

5. Answer all the questions :

5.(a) y is a function of x, such that the differential coefficient $\dfrac{dy}{dx}$ is equal to $\cos(x + y) + \sin(x + y)$. Find out a relation between x and y, which is free from any derivative/differential. 10

5.(b) Obtain the equation of the orthogonal trajectory of the family of curves represented by $r^n = a \sin n\theta$, (r, θ) being the plane polar coordinates. 10

5.(c) A body is performing S.H.M. in a straight line OPQ. Its velocity is zero at points P and Q whose distances from O are x and y respectively and its velocity is v at the mid-point between P and Q. Find the time of one complete oscillation. 10

5.(d) The base of an inclined plane is 4 metres in length and the height is 3 metres. A force of 8 kg acting parallel to the plane will just prevent a weight of 20 kg from sliding down. Find the coefficient of friction between the plane and the weight. 10

5.(e) Show that the curve

$$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$$ lies in a plane.

10

6.(a) Solve the differential equation
$(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0.$ 10

6.(b) Using the method of variation of parameters, solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax.$$ 10

6.(c) Find the general solution of the equation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x).$$ 15

6.(d) By using Laplace transform method, solve the differential equation

$\left(D^2 + n^2\right)x = a \sin(nt + \alpha),\ D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ subject to the initial conditions

$x = 0$ and $\frac{dx}{dt} = 0$, at $t = 0$, in which a, n and α are constants. 15

7.(a) A particle of mass 2·5 kg hangs at the end of a string, 0·9 m long, the other end of which is attached to a fixed point. The particle is projected horizontally with a velocity 8 m/sec. Find the velocity of the particle and tension in the string when the string is (i) horizontal (ii) vertically upward. 20

7.(b) A uniform ladder rests at an angle of 45° with the horizontal with its upper extremity against a rough vertical wall and its lower extremity on the ground. If μ and μ' are the coefficients of limiting friction between the ladder and the ground and wall respectively, then find the minimum horizontal force required to move the lower end of the ladder towards the wall. 15

7.(c) Six equal rods AB, BC, CD, DE, EF and FA are each of weight W and are freely jointed at their extremities so as to form a hexagon; the rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are joined by a string. Find the tension in the string. 15

8.(a) Calculate $\nabla^2(r^n)$ and find its expression in terms of r and n, r being the distance of any point (x, y, z) from the origin, n being a constant and ∇^2 being the Laplace operator. 10

8.(b) A curve in space is defined by the vector equation $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$. Determine the angle between the tangents to this curve at the points $t = +1$ and $t = -1$. 10

8.(c) By using Divergence Theorem of Gauss, evaluate the surface integral

$\iint\left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}} dS$, where S is the surface of the ellipsoid

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, a, b and c being all positive constants. 15

8.(d) Use Stokes' theorem to evaluate the line integral $\int_C\left(-y^3dx + x^3dy - z^3dz\right)$, where C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. 15